3. Рефлексивность, симметричность, кососимметричность, транзитивность отношений и замыкания их по рефлексивности, симметричности и транзитивности. Отношение экви-валентности.

Базовые свойства отношений

Пусть R — бинарное отношение на множестве A, то есть R⊆A×A. Тогда говорят:

1. Рефлексивность  
   Отношение R называется рефлексивным, если

∀x∈A    (x,x)∈R.

То есть каждый элемент находится «в отношении с самим собой».

1. Симметричность  
   Отношение R называется симметричным, если

∀x,y∈A    ((x,y)∈R  ⇒  (y,x)∈R).

Иначе говоря, если x связан с y, то и y связан с x.

1. Кососимметричность (антиметричность)  
   Иногда встречаются разные термины: «кососимметричность», «антиметричность», «антисимметричность». В классическом курсе чаще используют слово «антисимметричность». Формулировка:

∀x,y∈A  ((x,y)∈R  и  (y,x)∈R)  ⇒  x=y.

То есть если x и y взаимно связаны, то это возможно лишь в случае, когда x=y.

Замечание: Свойство антисимметрии критически важно при определении частичного порядка, тогда как при эквивалентности требуется обычная симметрия.

1. Транзитивность  
   Отношение R называется транзитивным, если

∀x,y,z∈A    ((x,y)∈R  и  (y,z)∈R)  ⇒  (x,z)∈R.

Иными словами, «связь» передаётся через промежуточное звено: если x связано с y, а y с z, тогда x связано и с z.

1.1. Примеры

* Рефлексивное и симметричное:  
  Пусть A={1,2,3} . Возьмём отношение

R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)}.

Оно рефлексивно, так как (1,1),(2,2),(3,3) все входят в R. Также оно симметрично: наличие (1,2) влечёт (2,1), наличие (2,3) влечёт (3,2), и т.д.  
Однако оно не транзитивно: у нас есть (1,2) и (2,3), но (1,3) в R нет.

* Антисимметричное (кососимметричное):  
  Рассмотрим на множестве A={1,2,3} отношение частичного порядка, например

R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)}.

* + Оно рефлексивно, так как (x,x)∈R для всех x.
  + Если (x,y)∈R и (y,x)∈R, то x=y (для разных x≠y нет встречных пар), значит оно антисимметрично.
  + Также это отношение транзитивно (можно проверить: (1,2) и (2,3) ⇒ (1,3) уже есть в R, и т.п.).

## Замыкания по данным свойствам

### 2.1. Общее понятие «замыкания»

Для отношения R⊆A×A «замыканием по некоторому свойству» называют **минимальное** (по включению) надмножество R, обладающее этим свойством.

Например, **рефлексивное замыкание** отношения R — это наименьшее рефлексивное отношение R′, для которого R⊆R′. Аналогично определяются симметрическое и транзитивное замыкания.

#### Почему говорят «минимальное по включению»?

Это значит, что мы добавляем в R ровно те пары (и только те, без «лишних»), которые необходимы, чтобы удовлетворить нужному свойству.

2.2Рефлексивное замыкание

Чтобы сделать R рефлексивным, нужно добавить в него все пары вида (x,x), гдеx∈A. Если какие-то (x,x) уже есть, мы их не дублируем, разумеется.

Формально, рефлексивное замыкание R^ref есть

R^ref   =  R  ∪  {(x,x)∣x∈A}.

Если R уже было рефлексивно, то замыкание совпадёт с самим R.

* Если нет, мы «добавим» недостающие петли.

2.3Симметрическое замыкание

Чтобы обеспечить симметричность, если в R есть (x,y), но нет (y,x), то нужно добавить (y,x). Делают это для всех таких пар.

Формально, симметрическое замыкание R^sym:

R^sym  =  R  ∪  {(y,x)  ∣  (x,y)∈R}.

### 2.4. Транзитивное замыкание

Самое сложное по построению — **транзитивное замыкание**. Его ещё часто обозначают R^∗ или TC(R). В литературе нередко встречается понятие «транзитивное замыкание» = «транзитивная оболочка».

Определяется так: это минимальное надмножество R, транзитивное и содержащее R. То есть, если (x,y) и (y,z) принадлежат этому множеству, то (x,z) тоже в нём.

**Способ построения** (интуитивный):

1. Начинаем с исходного R.
2. Если есть два ребра (x,y) и (y,z), но (x,z) ещё отсутствует, то добавляем (x,z).
3. Повторяем «добавление» до тех пор, пока новых пар появляться не будет.

Возможно, вам знакома идея **алгоритма Уоршелла — Флойда** (или упрощённого алгоритма Уоршелла) для вычисления транзитивного замыкания в виде матрицы смежности; это пример практической реализации.

#### Пример

* Возьмём R={(1,2),(2,3)} на множестве {1,2,3}.Оно не транзитивно, так как не хватает (1,3). Добавим (1,3). Теперь {(1,2),(2,3),(1,3)} уже транзитивно. Значит, это и есть транзитивное замыкание R.

Отношение эквивалентности

3.1. Определение

Отношением эквивалентности на множестве A называют такое R⊆A×A, которое обладает тремя свойствами одновременно:

1. Рефлексивность,
2. Симметричность,
3. Транзитивность.

Запись:

    (x,x)∈R    (∀x),

эквивалентность    ⟺ (x,y)∈R  ⟹  (y,x)∈R,

(x,y)∈R  и  (y,z)∈R    ⟹    (x,z)∈R.

3.2. Классы эквивалентности

Если R — отношение эквивалентности, то для каждого x∈A множество

[x]={ y∈A∣(x,y)∈R}

называют классом эквивалентности элемента x.

Ключевые свойства:

* Все классы эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются (если [x]∩[y]≠∅ то [x]=[y]).
* Объединение всех классов эквивалентности даёт исходное множество A.

3.3. Пример

Пусть A={1,2,3,4}. Определим R так:

R={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4), (1,2),(2,1), (3,4),(4,3), (1,3),(3,1),(2,4),(4,2)}.

Проверим свойства:

* (x,x) все есть → рефлексивно.
* Если (x,y)∈R, то и (y,x)∈R →→ симметрично.
* Транзитивность:
  + Так как «все со всеми» фактически связаны, становится ясно, что (x,z) возникает всегда, если есть (x,y) и (y,z). Можно подробно проверить, но видно, что любые пары присутствуют.
  + На самом деле, данное отношение делает все элементы «равноправными» — легко увидеть, что (1,3) есть, (3,4) есть, значит (1,4) тоже есть, и т.д.

В результате все элементы {1,2,3,4}принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, значит [1]=[2]=[3]=[4]={1,2,3,4}.Такое отношение фактически «говорит», что все элементы «эквивалентны».

Другой пример:

* Отношение «равенство по модулю n» на множестве целых чисел Z — тоже эквивалентность. Каждый класс эквивалентности — это набор чисел с одинаковым остатком при делении на n.

4. Связь с частичным порядком

Хотя вопрос напрямую об эквивалентности, стоит коротко отметить, что если в определении вместо симметрии поставить антисимметрию, то мы получим отношение частичного порядка, также требующее рефлексивности и транзитивности. Но это уже другая тема: частичный порядок, линейный порядок, иерархии и т.д.